Studies on intermediate predicate logics and intuitionistic modal logics (中間述語論理と直観主義的様相論理の研究)

著者	鈴木 信行
号	941
発行年	1990
URL	http://hdl.handle.net/10097/25126

氏名・(本籍)	鈴木信行（すずき のぶゆき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第941号
学位授与年月日	平成2年3月9日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和62年3月 広島大学大学院工学研究科 （前期2年の課程）システム工学専攻修了
学位論文題目	Studies on intermediate predicate logics and intuitionistic modal logics （中間述語論理と直観主義的様相論理の研究）
論文審査委員	（主査） 教授 黒田正　教授 堀田良之 教授 森田康夫 教授 小野寛晰

論文目次

論文内容要旨

本論文の目的は，中間述語論理及びそれに関連した直観主義的様相論理に就いて論じる事である。

中間論理の研究は，非古典論理の研究の一分野であり，直観主義的論理と古典論理の中間に広がる諸論理の研究を目的としている。これは，梅沢（1955）によって先鞭を付けられたと言ってよい。始めのモーティヴェイションは，直観主義論理と古典論理以外に論理を考える事が出来るか？と言う単純なものてせあったにも関わらず，あるいは単純であったが故に，数学的にも，論理学的にも非常に興味深い問題を提供し続けて今日に至っている。

中間論理には中間命題論理と中間述語論理の２種類がある。歴史的には中間命題論理の研究の方が先行した。論理の研究には，一般的に言って構文論的方法と意味論的方法がある。中間命題論理の研究では，意味論的方法のうち擬ブール代数（ハイティング代数）の担う役割が大きい。この方面は，中間命題論理の全体の成すクラスと擬ブール代数の自明でないヴァラエティ全体の成すクラスとの間の１対１の対応が明らかにされてから，ユニヴァーサル・アルジェブラと深く関連しつつ発展している。またクリプキによって考案されたクリプキ枠による意味論は，小野によって中間論理用に改造され，様々な結果が示されている。

中間述語論理の意味論的研究に於いても，擬ブール代数とクリプキ枠は自然に拡張され，それぞれ代数枠，（中間述語論理の）クリプキ枠と呼ばれており，重要な役割を果たしている。それらは残念ながら完全な道具ではない（小野，1972／73）。しかし，それぞれの意味論は，それ自体の構造に対する興味もあって近年の諸研究の対象となっている。例えば高野による，実数体Ｒと有理数体Ｑのそれぞれを基底とする様な定領域クリプキ枠によって特徴付けられる中間述語論理の統語論的な決定（1987）は，それらの諸結果のうちでも特筆すべきであろう。本論文の第２章の諸結果は基本的にこの流れに沿うものである。

一方，非古典論理の研究の領域には様相論理と呼ばれるタイプの対象があり様々な研究が成されて来た。その研究の中でヴァイスベルク（1933）は様相命題論理Ｓ５の様相作用子が古典述語論理の量化子と相似である事を示した。そして，ブル（1966）によって直観主義的な様相命題論理 MIPC の様相作用子と直観主義的述語論理の量化子との間にこれと同様の事が示された。小野（1977）によってもう一組の実例の発見され，この関係が直観主義的様相論理と中間述語論理との間の関係としてどの様に一般化され得るかと言う問題意識が発生した。この様な関係にある直観主義的様相論理と中間述語論理は互いに他の“写し”であると考えられる。“写し”である直観主義的様相論理を持たない中間述語論理の存在は既に明らかであったが，この逆が自明のものではない事，即ち，“写し”である中間述語論理を持たない直観主義的様相論理が存在する事は，筆者による反例（1987，小野の論文に収録）によって示された。しかし，この問題に関するポジティヴな結果は小野と筆者（1988）による結果が出るまで僅かに３つの例

が知られているのみであった為もあり，その本質的な部分は未だに全くと言ってよい程わかっていない。本論文の第3章はこの問題に関するものである。

以下に本論文の構成と内容を概観する。

第1章　序.

第1節　序説.

第2章以下の内容を大きく概観する。

第2節　中間述語論理の為の準備.

中間述語論理に関する技術的な準備事項をまとめておく。

第3節　直観主義的様相論理の為の準備.

直観主義的様相論理に関する技術的な準備事項をまとめておく。

第2章　中間述語論理.

第1節　個体領域が無限である代数枠のクラスで特徴付けられる中間論理.

小野（1973）は，代数枠のクラスが中間述語論理を特徴付ける為の必要十分条件は，そのクラスの中にある代数枠（P,U）が存在してその個体領域Uが無限集合である事である事を示した。これは個体領域の無限性という意味論的な性質が中間述語論理と強く結び付いている事を示すものである。では，個体領域が無限である様な代数枠のみからなるクラスは如何なる中間述語論理を特徴付けるのであろうか。この様なクラスで特徴付けられる中間述語論理を ω^+完全（ω^+-complete）と言う事にする。これに対して，（一般の）代数枠のクラスで特徴付けられる中間述語論理を（代数的に）完全（(algebraically) complete）と言う。本節では，この完全性と ω^+完全性とを結び付ける鍵となる概念が，pseudo-relevance property（略して PRP）なる統語論的性質である事を示した。

中間述語論理LがPRPを持つとは，任意の論理式A，Bに対して，A，Bが共通の述語変数を持たないとき，A⊃BがLで証明可能ならば，¬AまたはBがLで証明可能な事である。この性質は，クレイグの補間性（Craig's interpolation property）と言われる統語論的性質の特別な場合になっている事に注意しておく。まず，完全な中間述語論理LがPRPを持てば，ω^+完全である事を示した。次に，Kを¬¬∀x（p(x)∨¬p(x)）なる論理式とする。このとき，中間述語論理Lに於てKが証明可能であれば，Lが ω^+完全である事から，LがPRPを持つ事が導かれる事を示した。これらの結果を用いて，中間述語論理Lの完全性から ω^+完全性が必ずしも導かれない事が示される。

第2節　中間述語論理のいくつかの統語論的性質.

前節で扱った統語論的性質PRPが，クレイグの補間性と言われるものの特別な場合になっていると言う事は既に述べた。同様の見地から，ハルデン完全性（Hallden-completeness）は，選言特性（disjunction property）の特別な場合と考えられる。ここで，中間述語論理Lがハル

デン完全であるとは，任意の論理式A，Bに対して，A，Bが共通の述語変数を持たないとき，A∨BがLで証明可能ならば，AまたはBがLで証明可能な事である。中間命題論理に於いては，PRP は自明な性質である。即ち，任意の中間命題論理は PRP を持つ（古森，1978)。また，ヴロィンスキ（1976）は中間命題論理がハルデン完全である為の必要十分条件を擬ブール代数の言葉で与えている。しかし，中間述語論理に於いては，事はそれほど簡単でもなければ明白でもない。本節の目的は PRP,ハルデン完全性およびそれらを弱めた性質（PRP*,H*完全性）の間の関係を調べた。

中間述語論理LがPRP*を持つとは，任意の論理式A，Bに対して，A，Bが共通の述語変数を持たないとき，A⊃BがLで証明可能ならば，¬Aまたは¬¬BがLで証明可能な事である。中間述語論理LがH*完全であるとは，任意の論理式A，Bに対して，A，Bが共通の述語変数を持たないとき，A∨BがLで証明可能ならば，¬¬Aまたは¬¬BがLで証明可能な事である。このとき，容易に

① PRP ⇨ PRP*⇨ H*完全

および

② H完全⇨H*完全

を示す事が出来る。ここで，⇨は「ならば」を表す。

次に，先ほどのKが中間述語論理Lで証明可能であれば，Lは PRP*を（従ってH*完全性も）持つ事を示した。また，中間述語論理Lに於てKが証明可能かつLが個体領域が無限で強コムパクトな代数枠唯一つによって特徴付けられるとき，LはH完全である事を証明した。これらの結果と第1節の結果を用いて反例を構成し，上の①および②以外に⇨が成立しない事を示した。更に，これらの性質のうちで最も一般な性質はH*完全性であるが，この性質も持たない様な中間述語論理を構成した。

第3節　小野による完全性定理の拡張.

論理式Dを∀x（p(x)∨q）⊃（∀xp(x)∨q）とする。但し，pは1変数の述語変数，qは命題変数である。また，M1，M2，…，Mn，…，Mωを第2スライス（the second slice）の中間命題論理の数え上げとする。これに対して，小野（1983)は，中間述語論理 $M1_*$＋Dは高さが高々2で線形な定領域クリプキ枠の成すクラスによって特徴付けられる事，および，中間述語論理 $M\omega_*$＋Dは高さが高々2である定領域クリプキ枠の成すクラスによって特徴付けられる事を示した。本節では，小野の手法を拡張して，中間述語論理 Mn_*＋D（$1 \leqq n < \omega$）が高さが高々2で極大元を高々n個しか持たない定領域クリプキ枠の成すクラスによって特徴付けられる事を示す。この事と小野の結果を組み合わせる事によって，第2スライスにある任意の中間命題論理Jに対して，J_*＋Dの形をした中間述語論理のクリプキ枠による特徴付けが完全に与えられた事になる。

第３章　中間述語論理に関連した直観主義的様相論理.

第１節中冠述語論理に関連した直観主義的様相論理への代数的研究.

ヴァイスベルク（1933），ブル（1966），小野（1977）そして小野・鈴木（1988）による互いに他の“写し”である様な中間述語論理と直観主義的様相論理の組の実例は，全てクリプキ枠を用いて構成されている。本節では代数枠を用いる。

本論文で言う直観主義的様相論理とは，直観主義的な様相命題論理 MIPC の正規拡大のうち，その全ての公理がＳ５に於いて証明可能なものの事である。MIPC の任意の正規拡大Ｋに対して，２重位相擬ブール代数（bi-topological pseudo-Boolean algrbra, bi-tpBa と略す）のあるヴァラエティＶが存在して，ＶはＫを特徴付ける事が容易にわかる。この事から bi-tpBa（ｋヴァラエティ）の研究が直観主義的様相論理を調べる為に重要である事が予想される。本節では，直観主義的様相論理と中間述語論理との間の関係を踏まえて，bi-tpBa の代数的なアプローチを試みた。

まず，中間述語論理の代数枠から bi-tpBa を構成する手法を与え，こうして構成された bi-tpBa がもとの代数枠と緊密な関係がある事を示す。即ち，ある代数枠（P,U）によって特徴付けられる中間述語論理と，この構成法によって（P,U）から作られる bi-tpBa によって特徴付けられる直観主義的様相論理は，互いに他の“写し”である。この対応を用いて，述語論理での知識を直観主義的様相論理の世界にある程度持ち込む事が出来る。この手法を用いて，bi-tpBa（のヴァラエティ）が直観主義的様相論理を特徴付ける為の必要十分条件を与えた。

次に，各中間命題論理Ｊに対して，その最大述語拡大（the maximum predicate extension）Ｊ*の“写し”である直観主義的様相論理の公理化を与えた。中間命題論理が非加算個存在する事から，これによって，中間述語論理の“写し”である非加算個の直観主義的様相論理の実例を構成した事になる。

論文審査の結果の要旨

古典論理および古典論理上の様相論理は，人間の論理的思考の枠組みとして古くから研究が行われてきた。一方20世紀初頭にブラウワーは，数学における構成的な方法の論理的基礎づけとして直観主義論理を導入した。近年直観主義論理の証明と計算手続きとの密接な結び付きが明らかにされ，応用面からも直観主義論理に対する関心が高まりつつある。

本論文においては，直観主義論理と古典論理の間に位置する中間（述語）論理および直観主義論理上の様相（命題）論理に対し，それらのもつ基本的性質が証明されさらにこれら二つの論理のクラスの関係に関する重要な考察が行われている。

まず，無限の領域をもつ代数的フレーム（枠）のみにより決定されるような中間述語論理のクラスのもつ性質が論じられる。この論理のクラスは意味論的に定義されているが，これとPRP という構文論的性質をもつ論理のクラスとの間に密接な関係があることが示される。ここで，PRP とは論理のもつ重要な性質の一つであるクレイグの補間性を弱めた概念である。次に，この研究を発展させ，PRP,弱 PRP,ハルデン完全性，弱ハルデン完全性のそれぞれをもつ四つの論理のクラスの間の包含関係が詳細に論じられる。これらの結果は，古森やヴロンスキの得た命題論理についての結果と著しい対照をなしており，非常に興味深い。ついで，高さ 2 で定領域をもつクリプキフレームで決定されるような中間述語論理のすべてについて，その完全性を証明し，小野の結果を一般化することに成功した。

つぎに，直観主義様相命題論理と中間述語論理の間の関係が論じられる。ここでは，あたえられた中間述語論理の量化記号を様相演算として眺めたときどのような様相論理が定まるか，という問題が考察されている。これは参考文献の中で提起された問題であり，参考論文においていくつかの基礎的な結果が得られているものである。中間述語論理と直観主義様相論理の間の対応が明らかにされた例は，1980年代半ばまではたった3つしかなかったが，参考文献では可算個の例があたえられた。これに対し本論文では，新たに代数的（束論的）手法を用いることにより，非可算個の例を与えることに成功している。これはこの問題に対する深い洞察に基づくものであり，この分野における重要な貢献といえる。

以上，本論文において得られた諸結果は，非古典論理の研究において重要な寄与をしたものであり，理学博士の学位論文として合格である。